

**Aufgabe 9.1** Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels Induktion.

- a)  $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- b)  $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- c)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- d)  $4n^3 - n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 3 teilbar,
- e)  $n^3 - n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 6 teilbar,
- f)  $5^n + 7$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 4 teilbar,
- g) Die Zahl  $3^{2n+1} + 2^{n-1}$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 7 teilbar.

h<sup>#</sup>)  $2^n \geq n^2 - 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe<sup>#</sup> 9.2** Eine Pizza wird durch  $n$  Geraden in Stücke geschnitten. Die Schnitte können beliebig verlaufen. Wie viele Pizzastücke können höchstens entstehen? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese mit Induktion.

**Aufgabe 9.3** Berechnen Sie (wählen Sie passende  $a, b$  im binomischen Lehrsatz):

- a)  $\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k}$ ,                      c)  $\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} 2^k$ ,                      e)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ,
- b)  $\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (-1)^k$ ,                      d)  $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}$ ,                      f)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .

**Aufgabe 9.4** Aus 16 Karten (je 4 Buben, Damen, Könige und Assen) werden 8 gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass darunter (i) genau 1 Ass, (ii) kein Ass, (iii) mindestens 2 Assen, (iv) genau ein Bube, eine Dame, ein König und ein Ass sind.

**Aufgabe 9.5**

- a) Keine drei Diagonalen eines convexen 10-Ecks schneiden sich in einem Punkt. Wie viele Schnittpunkte der Diagonalen gibt es?
- b) Wie viele verschiedene "Wörter" (bzw. Kombinationen) kann man aus folgenden Buchstaben konstruieren:  
(i) ABERZ; (ii) EEGHN; (iii) BEEENTT; (iv) ABRAKADABRA?
- c) Das Eishockey-Team besteht aus 2 Torwarten, 7 Verteidigern und 10 Angreifern. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Anfangssechse (bestehend aus 1 Torwart, 2 Verteidigern und 3 Angreifern) zu stellen?
- d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 28 Spielkarten unter 7 Spieler zu verteilen?
- e) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 Bücher in 5 Pakete zu verteilen, falls 4 der Pakete genau 2 Bücher enthalten sollen.